МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
(МИНОБРНАУКИ РОССИИ)
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ДАГЕСТАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

"Утверждаю"
Директор ДФИЦ РАН
__________ А.К. Муртазаев
«15» 02 ________ 2022 г.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО МИНИМУМА
по специальности
1.1.1 Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Махачкала, 2022

Программа кандидатского экзамена по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) составлена в 2022 году в соответствии с Федеральным государственным требованием к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, утвержденным Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951.

Разработчик: Шарапудинов Т.И. – кандидат физико-математических наук, и.о. зав. отделом математики и информатики ДФИЦ РАН.

Программа обсуждена и одобрена на заседании Объединенного Ученого совета ДФИЦ РАН, протокол №6 от 11.02 2022 г.

Согласовано:

Зам. директора ДФИЦ РАН
по научной работе А.Б. Биарсланов

Зав. отделом аспирантуры ДФИЦ РАН Д.К. Сфиева

Введение

Кандидатский минимум является одной из составляющих итоговой аттестации обучающихся в аспирантуре по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре. *Основной целью* кандидатского минимума является установление уровня подготовки выпускника к выполнению профессиональных задач в соответствии с Федеральным государственным требованием к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре, утвержденным Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951.

Структура и содержание программы кандидатского минимума

Данная программы включает в себя следующие дисциплины:

- теория функций действительной переменной (действительный анализ);
- теория функций комплексной переменной (комплексный анализ);
- функциональный анализ.

1. Действительный анализ

1.1. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([1], гл. V)

1.2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([1], гл. VI)

1.3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L^p, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L^2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([1], гл. VII; [5], гл. VII)

1.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярнымы интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([1], гл. VIII, §§ 1-7)

1.5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([4], гл. 17)

2. Комплексный анализ

2.1. Интегральные представления аналитических функций

Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([5], гл. IV)

2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([5], гл. V–VII)

2.3. Целые и мероморфные функции

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([5], гл. IX, §1,2)

2.4. Конформные отображения

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([5], гл. III, § 1,3, гл. XII, §§ 1,2,6,7)

2.5. Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([5], гл. X, гл. XII, §8)

2.6. Гармонические функции

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Бесконечная дифференцируемость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([6])

3. Функциональный анализ

3.1. Метрические и топологические пространства

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([1], гл. II)

3.2. Нормированные и топологические линейные пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха-Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L^p. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([1], гл. III)

3.3. Линейные функционалы и линейные операторы

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([1], гл. IV, §§1–3,5,6)

3.4. Линейные операторы в гильбертовы пространствах

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8], гл. VI–VIII)

3.5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([1], гл. X)

3.6. Обобщенные функции

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1], гл. IV, §4, гл. VIII, §8; [7], гл. II)

Основная литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (Физматлит, 2009).

2. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.Т.1-3 (9-е изд. стер.). ЛАНЬ, 2009.

4. *Никольский С.М.* Курс математического анализа, т. II. М.: Наука, 1975 (Физматлит, 2001).

5. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (Лань, 2009).

6. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М.: Наука, 1976 (Физматлит, 2004).

7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., Наука, 1976 (1981).

8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976.

Дополнительная литература

Д1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. В 3 томах. М.: Дрофа (Т.1. 2003, Т.2. 2004, Т.3. 2006).

Д2. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М., Наука, 1991.

Д3. *Зорич В.А.* Математический анализ, т. II. М., Наука, 1984.

Д4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Д5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., Мир, 1975.

Д6. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М., Высш. Школа, 1999